**11. Совместные распределения,**

**независимые случайные величины**

**Определение.** Рассмотрим две дискретные случайные величины: принимает значения , принимает значения (*N* и *M* могут быть и бесконечными). Совместное распределение этих случайных величин есть набор вероятностей

(сокращенная запись означает совместное наступление двух событий ).

Основные свойства совместного распределения непосредственно следуют из общих свойств вероятности. Обозначим события , которые попарно между собой несовместны, и составляют разбиения множества тогда

и точно также

кроме того и сумма всех вероятностей удовлетворяет условию нормировки,

Рассмотрим теперь случайные величины , , принимающие значения в некоторых интервалах вещественной оси.

**Определение.** Плотностью совместного распределения случайных величин , называется неотрицательная функция такая, что для любых

Для совместной плотности справедливы свойства, аналогичные доказанным выше для дискретного совместного распределения: свертка по одной из переменных дает плотность распределения второй случайной величины. Действительно, функцию распределения можно выразить через совместную плотность,

взяв производную от интеграла с переменным верхним пределом, получим

Таким же образом выводим формулу для второй плотности:

Имеет место также условие нормировки:

Используя конструкцию совместного распределения, можно доказать линейность операции математического ожидания: сделаем это здесь для непрерывных случайных величин.

**Теорема 11.1.** Если случайные величины , имеют математическое ожидание, то

**Доказательство.** Функция распределения случайной величины:

или, преобразуя двойной интеграл в повторный (см. рисунок 11.1):

, вычислив производную по *x*, получаем плотность

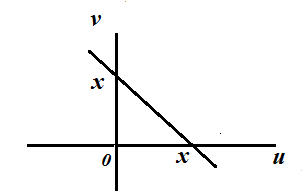


Рисунок 11.1. К вычислению интеграла

Искомое математическое ожидание получается путем очевидных преобразований интеграла

применив доказанные выше свойства совместной плотности ( ), получим результат.

Учитывая также следствие к Теореме 9.1., видим, что математическое ожидание является линейным функционалом на множестве случайных величин: для любых констант

**Определение**. Случайные величины называются независимыми, если они принимают свои значения независимо друг от друга, иначе говоря, для любых борелевских множеств и события , независимы:

.

Дискретные случайные величины являются независимыми, если

непрерывные случайные величины будут независимыми, если

Если случайные величины , независимы, то имеет место следующее важное свойство математического ожидания:

Действительно, для дискретных случайных величин , по определению, имеем

Для непрерывных же ,:

Следствие из этого свойства: для независимых случайных величин дисперсия суммы равна сумме дисперсий,

Действительно, обозначая , , получаем

поскольку по причине независимости .

Как будет видно в дальнейшем, из этого равенства можно вывести очень существенные следствия.

Отметим также важное свойство математического ожидания, необходимое при выполнении операций над двумя случайными величинами: если функция такова, что является случайной величиной, то

для непрерывных и

если имеют дискретное распределение. В дискретном варианте это равенство фактически является определением математического ожидания, а на непрерывный случай его можно продолжить, используя свойство непрерывности вероятности.

**Пример 11.1.** Применим свойство дисперсии суммы независимых случайных величин для вычисления дисперсии биномиального распределения (см. Пример 8.1 и Упражнение 10.2).

Случайную величину с биномиальным распределением можно представить как сумму *n* независимых бинарных случайных величин (см. Пример 10.1):

,

тогда дисперсия равна сумме дисперсий,

и нет необходимости вычислять сложные суммы с биномиальными коэффициентами.

Отметим еще полезную формулу, следующую из ( ): для независимых случайных величин

этот интеграл называется сверткой распределений.

**Пример 11.2. (**Феллер[ ] стр. 41 ). Построим распределение суммы независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале [0, *a*]. Функция распределения и плотность для :

Обозначим функцию распределения, а - плотность распределения суммы , тогда согласно формуле свертки,

В качестве упражнения предлагается вывести формулы для и , чтобы убедиться, что первая представляет собой треугольное распределение, а вторая составлена из трех состыкованных парабол, представляющих похожую на колокол фигуру.

Общую формулу выведем по индукции. Используем обозначение:

чтобы записывать выражения вида

С помощью этого обозначения функцию равномерного распределения можно записать

в виде

Докажем по индукции справедливость следующих формул:

При *n* = 1 формула для предыдущей. Допустим, формула ( ) верна при некотором *n* > 1; подставляя ее в ( ), получим в виде разности двух сумм. Если во второй сумме заменить индекс суммирования *k* на *k*-1, то получим

но это выражение совпадает с ( ), так как

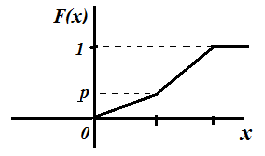
Операция суммирования случайных величин очень часто применяется в приложениях и в теории. Особенно это важно в математической статистике для построения оценок и критериев проверки гипотез. Как правило суммируются однородные по природе величины: дискретные с дискретными либо непрерывные с непрерывными, для них и выведено множество формул; но при необходимости можно построить формулы для разнородных величин. Рассмотрим в качестве иллюстрации простой пример суммирования дискретной и непрерывной случайных величин.

**Пример 11.3.** Сумма дискретной и непрерывной случайных величин. Пусть бинарная случайная величина принимает значение 1 с вероятностью *p* и 0 с вероятностью (1- *p*), а имеет равномерное распределение на интервале [0,1] и они независимы.

Сумма + принимает значения на интервале [0,2]. Для 0

при 1,

Построенное распределение показано на Рисунке 11.2. Из вывода формул ясно, что распределение суммы дискретной и непрерывной случайных величин будет непрерывным.

****

**Рисунок 11.2.** Распределение суммы дискретной и

непрерывной случайных величин